Ensvinklede trekanter

Rationalt størrelsesforhold

Jacob Nielsen[1]

En af de mest anvendte sætninger i geometrien er sætningen nedenfor om ensvinklede trekanter. Den optræder i Euclids elementer som to sætninger VI.4 og VI.5 - svarende til de to veje: ⇑og ⇓, der er indeholdt i biimplikationen: ⇕, i sætning 1. Beviset for sætningen bygger på sætninger fra flere af de fem forgående bøger, så beviset kræver en del forarbejde.

Sætning 1

ΔABC og $\Delta A_1B_1C_1$ er ensvinklede

⇕

Forholdet mellem ensliggende siders længde er ens

Følgende mindre generelle sætning kan imidlertid bevises forholdsvis enkelt.

Sætning 2

ΔABC og $\Delta A_1B_1C_1$ er ensvinklede og forholdet mellem de ensliggende sider a og a_1 er et rationalt tal Q.

⇕

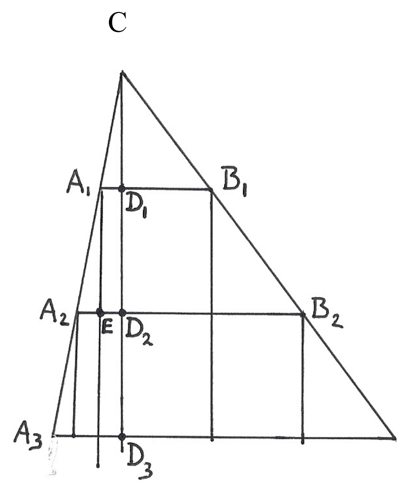
Forholdet mellem alle par af ensliggende sider er Q.

I praksis har det ikke den store betydning, at sideforholdet skal være rationalt, da man til ethvert reelt tal kan finde et rationalt tal, der ligger vilkårligt tæt på dette reelle tal.

Bevis for sætning 2

Beviset for sætning 2 forløber lidt forskelligt - afhængigt af om trekanterne er stumpvinklede eller spidsvinklede. For overskuelighedens skyld gemmes det stumpvinklede tilfælde til sidst. Den grundlæggende idé fremgår af figuren øverst på næste side.

[1] Datadrev\Matematik\Geometri\Ensvink trekanter Rational 290809.wpd



Ideen i beviset:

Den store trekant er konstrueret ud fra linjer, der alle er parallelle med A_1B_1, og som alle har en indbyrdes afstand lig med højden i $\triangle A_1B_1C$. Ved hjælp af en række linjer, der står vinkelret på A_1B_1, er den store trekant delt op i retvinklede trekanter og rektangler. De retvinklede trekanter i venstre side af den store trekant er identiske, og det samme gælder for de retvinklede trekanter i højre side. På tilsvarende måde opstår to typer rektangler. Det fremgår så tydeligt, at alle sidelængder i $\triangle A_3B_3C$ er tre gange så store som de tilsvarende sidelængder i $\triangle A_1B_1C$. Desuden opstår $\triangle A_2B_2C$ hvor siderne er 2/3 af siderne i $\triangle A_3B_3C$.

Ideen kan oplagt anvendes for alle andre rationale sideforhold.

Ovenstående vil måske for mange fremstå som et fuldgyldigt bevis, men gamle Euclid ville bestemt ikke være tilfreds med en redegørelse for ideen i beviset. Nedenfor strammer vi argumentationen op til et egentligt bevis ved at argumentere ud fra sætninger, der er bevist i Euclids bøger - og ud fra hans fem aksiomer.

Selve beviset

Vi starter med den del af sætningen, der svarer til implikationen: $\Downarrow$.

Givet: $\triangle A_mB_mC$ og $\triangle A_nB_nC$, der er ensvinklede og hvor forholdet mellem de ensliggende sider a_m og a_n er et rationalt tal Q = m/n (på figuren er Q = 2/3 og (m;n) = (2;3) , hvis vi betragter $\triangle A_2B_2C$ og $\triangle A_3B_3C$). Vi ser nu på tilfældet med to trekanter $\triangle A_1B_1C$ og $\triangle A_nB_nC$; altså hvor den ene er n gange større end den anden. Så vil trekanterne med sideforholdet m/n fremkomme, ligesom trekanterne med sideforholdet 2/3 fremkommer, når vi ser på tilfældet med to trekanter med sideforhold 3.

De ensvinklede trekanterne anbringes nu med en fælles vinkel C og og siderne a_1 og a_n,liggende på samme linje. Da trekanterne er ensvinklede vil siderne b_1 og b_n også komme til at ligge på samme linje. Konstruer nu en ret linje gennem C vinkelret på linjen A_1B_1, det er muligt ifølge **Euclid I.12** . Herved fremkommer punktet D_1 som skæring mellem den nye linje og A_1B_1.

Konstruer nu en linje parallel med A_1B_1 i afstanden CD_1. Det er muligt ifølge **Euclid I.11**, **Euclid I.2 og aksiom 2,** eftersom det svarer til at konstruere en linje gennem D_2 vinkelret på CD_2. Herved fremkommer punkterne A_2 D_2 og B_2 . At A_1B_1 er parallel med A_2B_2 - det følger af **Euclid aksiom 5**. På tilsvarende måde konstrueres i alt n-1 linjer parallelt med A_1B_1. Vi har nu fået konstrueret de "vandrette" delelinjer i den store trekant.

Delelinjerne, der alle er vinkelret på A_nB_n (de "lodrette") konstrueres ved gentagende anvendelse af **Euclid I.12** . Vi har nu fået inddelt $\triangle A_nB_nC$ i retvinklede trekanter og rektangler.

Tilbage er blot at vise, at alle de retvinklede trekanter inden i $\triangle A_nD_nC$ er ens, og at det samme gælder rektanglerne. Det samme vil så oplagt gælde for $\triangle D_nB_nC$. Hvis de nævnte trekanter og rektangler er ens fremgår det af figuren at A_nB_n er n gange længre end A_1B_1 , og at forholdet mellem CA_n og CA_1 ligeledes er n. Ligeledes vil sætningen være bevist for Q = m/n.

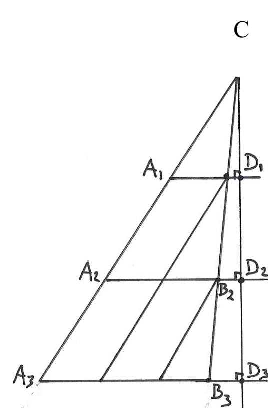
Betragt $\triangle A_1D_1C$ og $\triangle A_2E\,A_1$. $\angle A_1CD_1 = \angle A_2A_1E$ fordi vinkelbenene er parvis parallelle. Da desuden $CD_1 = A_1E$ har trekanterne en side og de to vinkler ens, og trekanterne er derfor kongruente[2] - **Euclid I.26** . Alle parallelogrammerne kan opdeles i to ens retvinklede trekanter, der hver især er kongruente med $\triangle A_1D_1C$, så parallellogrammerne må være kongruente.

Nu vises, at implikationen $\Uparrow$ også gælder.

Vi har altså to trekanter, hvor forholdet mellem ensliggende sider er m/n, og opgaven er at vise, at de er ensvinklede. Foretag nu en opdeling af den største af trekanterne i retvinklede trekanter og rektangler på samme måde som vi gjorde tidligere. Der vil nu i den store trekants indre opstå en trekant, hvor alle siderne er m/n af af siderne i den store. Denne trekant er kongruent med den mindste af de oprindelige trekanterne; fordi to trekanter, der har alle sider lige lange, er kongruente **- Euclid I.8**. $\triangle A_1B_1C$, $\triangle A_3B_3C$, ...,$\triangle A_mB_mC$ er ensvinklede; fordi de har vinklen C fælles og sidene, der ligger overfor vinkel C er alle parallelle.

Til sidst et par ord om det stumpvinklede tilfælde.

På figuren nedenfor ses, hvordan vi kan opdele den stumpvinklede trekant, så mindre ensvinklede trekanter opstår i dens indre. Beviset for det stumpvinklede tilfælde forløber nu analogt til beviset for det spidsvinklede tilfælde. Det overlades til læseren at gennemføre bevisets detaljer.



Q.E.D

---

[2] I Euclid bruges ordet "ens" I betydningen: "Har lige store arealer". Mens to polygoner er kongruente, hvis de har alle sider og vinkler parvis lige store.